

# 階段状チョコレートゲームのグランディ数

関西学院高等部 数理科学部

## 概要

チョコレートゲームはニム(石取りゲーム)の変種であり,板状のチョコレートに一箇所だけ苦いチョコレートを配置し,二人のプレイヤーが交互に線に沿って垂直もしくは水平方向へ一直線にカットして2つに分割し,苦い部分を含まない方を食べる.これを繰り返していき,苦い部分だけを相手に残したプレイヤーが勝つ.長方形チョコレートはニムと数学的に同値であるが,私達は階段状のチョコレートゲームを研究する.このタイプでは,垂直方向の段数を減らすと,水平方向の段数が減る可能性がある.本稿では,グランディ数とニム和が一致するときの必要十分条件を証明した.

## 1 序文

チョコレートゲームは,一箇所に苦いチョコレートを配置した板状のチョコレートにおいて,2人のプレイヤーが互いに縦もしくは横一直線にチョコレートを2つに分割して,苦いチョコレートを含まない方を食べる.そして苦いチョコレートを相手に残せば勝ちとなる.図1.1のチョコレートゲームは,山の高さがそれぞれ3,3,2の3つの山をもつニムと数学的に同値である.ここで,カットできる最大回数が,苦い部分の左側で3,上側で3,右側で2となる.このとき,座標 $\{3,3,2\}$ と表す.本稿では,図1.2~図1.4のような階段状のタイプのチョコレートを研究している.このタイプでは,垂直方向のカットにより,水平方向に切ることができる回数が増える可能性があり,長方形チョコレートゲームや,3つの山の石取りゲームとは数学的性質が異なる.

図1.1のような長方形チョコレートゲームは各方向に切ることができる最大数によって座標 $\{x,y,z\}$ と表すことができ,3つの山の石取りゲームも座標 $\{x,y,z\}$ と表すことができるが,これらは数学的に同値であるから,良く知られている3つの山の石取りゲームの理論によってグランディ数は $x \oplus y \oplus z$ で表すことができる.しかし階段状のタイプのチョコレートにおいては,グランディ数を求めることが簡単でないものが多い.私達のグループは国際的な数学専門誌[1]において,グランディ数が $x \oplus y \oplus z$ で表されるためにチョコレートの形状が満たすべき十分条件を提出した.なお,グランディ数が $x \oplus y \oplus z$ という形にならないチョコレートの形状については,例としては図1.5と図1.6のチョコレートがある.

従って,グランディ数が $x \oplus y \oplus z$ で表されるためにチョコレートの形状が満たすべき必要十分条件が重要な問題になる.本論文においては,この必要十分条件を提出し,証明する.結果として,数学専門誌[1]掲載論文の一般化が完成したことになるので,その論文の内容を越えたと自負している.使っている数学は高校レベルを殆ど越えていないが,かなり独特な証明と計算が多いので組み合わせゲーム論にかなり詳しい人でないと理解できない可能性が高い.ただし,綿密な添削を何度も繰り返したので,数学的厳密さは保証できる.

以下, $Z_{\geq 0}$ を非負整数の集合とする.また $x_i \in \{0,1\}$ と書くときは, $x_i$ は0か1であるという意味である.

例 1.1. チョコレートゲームの例をあげる.チョコレートゲームでは,座標を $\{x,y,z\}$ ただし $(x,y,z \in Z_{\geq 0})$ と表現する.詳しくは後で説明を行う.なお,図1.1のチョコレートの座標は $\{3,3,2\}$ ,図1.2の座標は $\{4,4,9\}$ ,図1.3の座標は $\{4,3,13\}$ ,図1.4の座標は $\{4,3,13\}$ である.

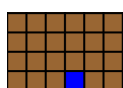


図 1.1.  $\{3,3,2\}$

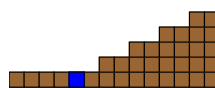


図 1.2.  $\{4,4,9\}$



図 1.3.  $\{4,3,13\}$

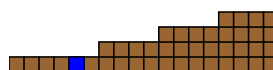


図 1.4.  $\{4,3,13\}$

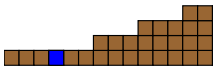


図 1.5.

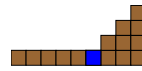


図 1.6.

チョコレートゲームは組み合わせゲームであり、詳しくは [4] を参照していただきたい。

定義 1.1.  $x, y$  を非負整数とし、 $2$  を基数として書くと、 $x = \sum_{i=0}^n x_i 2^i, y = \sum_{i=0}^n y_i 2^i$  ( $x_i, y_i \in \{0, 1\}$ ) となる。ニム和  $x \oplus y$  を以下のように定義する。

$$x \oplus y = \sum_{i=0}^n w_i 2^i, \quad (1.1)$$

ここで、 $w_i = x_i + y_i \pmod{2}$  である。

チョコレートゲームには以下の 2 つの状態があり、すべての状態はどちらかに属する。

定義 1.2. (a) 先手必勝手 ( $N$ -Position) とは、後手がどのような戦略をとっても、先手がうまくプレイすれば必ず勝てる状態。

(b) 後手必勝手 ( $P$ -Position) とは、先手がどのような戦略をとっても、後手がうまくプレイすれば必ず勝てる状態。

定義 1.3.  $G$  と  $H$  を不偏ゲームとする。この 2 つのゲームの直和  $G + H$  は、プレーの度に、プレイヤーが  $G$  または  $H$  のいずれかを選んでプレーすることによって成立するゲームである。

図 1.2 から図 1.4 において、各チョコレートゲームは、苦い部分の左側のチョコレートと、苦い部分の右側のチョコレートの直和であると考えることができる。

定義 1.4. ゲーム  $G$  の状態  $p$  に対して、一手で移動できる集合を  $move(p)$  と表記する。

注意 1.1.  $move$  の例は、例 1.4 を見ていただきたい。

定義 1.5. (i)  $mex$  関数とは、非負整数からなる集合  $S$  に含まれていない数字の中で、最も小さい非負整数を出力する関数である。

(ii) グランディ数とは与えられた状態から一手で移動出来る全ての状態におけるグランディ数からなる集合に含まれていない最小の非負整数であり、グランディ数を  $G$  とすると、以下のように再帰的に定義される。

$$G(p) = mex\{G(h) : h \in move(p)\}$$

$mex$  から次の補題が導かれる。

補題 1.1.  $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  とし、 $k = 1, 2, \dots, n$  に対して、 $y_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  とする。そのとき (i) と (ii) は同値である。

(i)  $x = mex\{y_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ .

(ii) 全ての  $k$  に対して  $x \neq y_k$  であり、 $u < x$  となる  $u \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して、 $u = y_k$  となる  $k$  がある。

証明. 定義 1.5 から直接導かれる ( $mex$  の定義). □

補題 1.2.  $S$  を集合とし、 $\{1, 2, 3, \dots, m-1\} \subset S$  であるとする。そのとき、 $mex(S) \geq m$  が成り立つ。

証明. 定義 1.5 の  $mex$  の定義から直接導かれる... □

グランディ数が強力なツールであることは、次の結果からわかる。

定理 1.1.  $G, H$  を不偏ゲームであるとする。 $G_G$  と  $G_H$  をそれぞれ、 $G$  と  $H$  のグランディ数だとすると、次のことが成り立つ。

(i)  $G$  の全てのポジション  $g$  に対して、 $g$  が  $P$ -position となるのは、 $G_G(g) = 0$  のときに限る。

(ii)  $G + H$  のポジション  $\{g, h\}$  におけるグランディ数は、 $G_G(g) \oplus G_H(h)$  となる。

この定理の証明は、[4] を参照していただきたい。

一般的なチョコレートを扱うと複雑になりすぎるため、ここでは高さが一定の条件に従って増加する階段状のチョコレートだけを研究する。

定義 1.6. 関数  $f$  が以下の 2 つの条件を満たすとする .

(i)  $t \in Z_{\geq 0}$  に対して ,  $f(t) \in Z_{\geq 0}$  が成り立つ .

(ii)  $f$  は単調増加である . つまり ,  $u \leq v$  を満たす  $u, v \in Z_{\geq 0}$  に対して ,  $f(u) \leq f(v)$  となる .

定義 1.7.  $y, z$  を非負整数とし  $y \leq f(z)$  とすると , チョコレートは  $z + 1$  列で構成され , 0 列目は苦いチョコレート ,  $i$  列目の高さは  $t(i) = \min(y, f(i)) + 1$  である . そのチョコレートを  $CB(f, y, z)$  と表記する .

$y, z$  はそれぞれ水平方向 , 垂直方向に線に沿って一直線に切ることができる最大回数を表す .

例 1.2.  $CB(f, y, z)$  の例 .

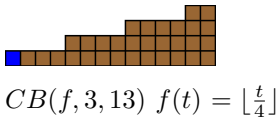


図 1.7.

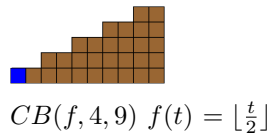


図 1.8.

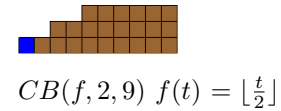


図 1.9.

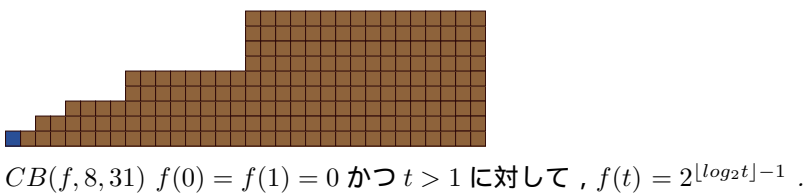


図 1.10.

定義 1.6 の条件を満たす関数  $f$  を固定して考えるときは ,  $f$  を略して ,  $CB(f, y, z)$  を  $\{y, z\}$  という座標で表す .

例 1.3.  $f(t) = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$  となるチョコレートの例 .

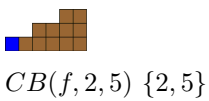


図 1.11.

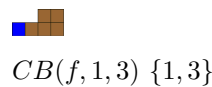


図 1.12.

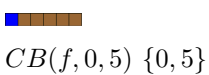


図 1.13.

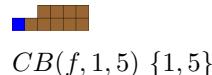


図 1.14.

関数  $f$  を固定して考える .  $CB(f, y, z)$  の各座標  $\{y, z\}$  において , そこから一手で移動できるポジションの座標をすべて表す集合を  $move_f(\{y, z\})$  と書く . これは定義 1.4 で定義された  $move$  の特別な場合である . 階段状のチョコレートでは垂直方向のカットにより ( $z$  座標が減って) , 水平方向に切ることができる回数が減る可能性があるが , このことは下の定義では , 第 2 座標が  $\min(y, f(w))$  となることで表されている .

定義 1.8.  $y, z \in Z_{\geq 0}$  に対して ,  $move_f(\{y, z\}) = \{v, z\} : v < y\} \cup \{\min(y, f(w)), w\} : w < z\}$  , ( $v, w \in Z_{\geq 0}$ ).

例 1.4. 関数  $f(t) = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$  を固定して考える . 例 1.3 のチョコレートを例に使う .

$\{y, z\} = \{2, 5\}$  の位置から開始したとする . 第 1 座標である  $y$  を減らすと ,  $\{1, 5\}, \{0, 5\}$  へ行けるので ,  $\{1, 5\}, \{0, 5\} \in move_f(\{2, 5\})$  となる .

$\{y, z\} = \{2, 5\}$  の位置から第 2 座標である  $z$  を 5 から 4 に減らすと , 第 1 座標である  $y$  は ,  $\min(2, \lfloor 4/2 \rfloor) = \min(2, 2) = 2$  のままである . 従って ,  $\{2, 4\} \in move_f(\{2, 5\})$

$\{y, z\} = \{2, 5\}$  の位置から第 2 座標である  $z$  を 5 から 3 に減らすと , 第 1 座標である  $y$  は ,  $\min(2, \lfloor 3/2 \rfloor) = \min(2, 1) = 1$  となる . 従って ,  $\{1, 3\} \in move_f(\{2, 5\})$

$\{y, z\} = \{1, 3\}$  の位置からはどのようにしても  $\{0, 5\}$  へは行けないので ,  $\{0, 5\} \notin move_f(\{1, 3\})$  である .

本論文の目的として，チョコレート  $CB(f, y, z)$  のグランディ数が  $G(\{y, z\}) = y \oplus z$  となるために  $f$  が満たすべき必要十分条件を求めるが，そのための方法として，1.2, 1.3 のように苦い部分の右側に  $CB(f, y, z)$ ，左側に高さ 1 のチョコレートをおいた直和を考える．左側の高さ 1 チョコレートを垂直方向にカットできる回数を  $x$  とすると，このチョコレートは  $\{x, y, z\}$  と表すことができる．このチョコレートの  $P$ -position が  $x \oplus y \oplus z = 0$  となる場合であることを示し，結果的に  $CB(f, y, z)$  のグランディ数が  $G(\{y, z\}) = y \oplus z$  となることを導く．

## 2 $G(\{y, z\}) = y \oplus z$ となるチョコレートゲーム

### 2.1 十分条件

この小節ではグランディ数  $G(\{y, z\}) = y \oplus z$  となるチョコレートの十分条件について述べる．

定義 2.1. 定義 1.6 を満たす関数を  $h$  とおく．この  $h$  は次の条件を満たす．

(a) ある  $z, z' \in Z_{\geq 0}$  と，ある自然数  $i$  において

$$\lfloor \frac{z}{2^i} \rfloor = \lfloor \frac{z'}{2^i} \rfloor \quad (2.1)$$

とすると，

$$\lfloor \frac{h(z)}{2^{i-1}} \rfloor = \lfloor \frac{h(z')}{2^{i-1}} \rfloor \quad (2.2)$$

となる．

注意 2.1. 定義 2.1 の条件 (a) は以下に示す条件 (b) と等しい．

(b) 各  $k = 0, 1, \dots, n$  に対して  $z_k, y_k \in \{0, 1\}$  とおく．また，

$$h\left(\sum_{k=0}^n z_k 2^k\right) = \sum_{k=0}^n y_k 2^k$$

とおく．そうすると，各  $k = 0, \dots, i-1$  に対して定義された  $z'_k \in \{0, 1\}$  に対して，各  $k = 0, \dots, i-2$  に対して定義された  $y'_k \in \{0, 1\}$  が存在して，次の式が成立する．

$$h\left(\sum_{k=i}^n z_k 2^k + \sum_{k=0}^{i-1} z'_k 2^k\right) = \sum_{k=i-1}^n y_k 2^k + \sum_{k=0}^{i-2} y'_k 2^k.$$

ただし  $i$  は自然数とする．

補題 2.1 と補題 2.2 において，定義 2.1 の条件 (a) を満たす関数の例を与える．

補題 2.1. ある自然数  $k$  において  $h(z) = \lfloor \frac{z}{2k} \rfloor$  とする．このとき， $h(z)$  は，定義 2.1 を満たす．

証明. 定義 2.1 の条件の対偶を証明する．

等式 (2.2) が成立しないとすると，そのとき，ある  $u \in Z_{\geq 0}$  と，ある自然数  $i$  が存在して，

$$\lfloor \frac{\lfloor \frac{z}{2k} \rfloor}{2^{i-1}} \rfloor = u < u+1 \leq \lfloor \frac{\lfloor \frac{z'}{2k} \rfloor}{2^{i-1}} \rfloor \quad (2.3)$$

となる．等式 (2.1) が成立しないことを証明する．不等式 (2.3) より，

$$\lfloor \frac{z}{2k} \rfloor \leq u 2^{i-1} + 2^{i-1} - 1 < (u+1) 2^{i-1} \leq \lfloor \frac{z'}{2k} \rfloor$$

が導かれる．したがって

$$z \leq 2k(u 2^{i-1} + 2^{i-1} - 1) + 2k - 1 < 2k(u+1) 2^{i-1} \leq z'. \quad (2.4)$$

不等式 (2.4) より，

$$\frac{z}{2^i} \leq k(u+1) - \frac{1}{2^i} < k(u+1) \leq \frac{z'}{2^i}$$

が導かれる．したがって

$$\lfloor \frac{z}{2^i} \rfloor < k(u+1) \leq \lfloor \frac{z'}{2^i} \rfloor.$$

ここで等式 (2.1) が成立しないことが示された． □

補題 2.2.  $h(0) = h(1) = 0$  とし,  $z \geq 2$  を満たす  $z \in Z_{\geq 0}$  に対して,  $h(z) = 2^{\lfloor \log_2 z \rfloor - 1}$  とおく. このとき  $h(z)$  は定義 2.1 の条件を満たす.

証明. 定義 2.1 の条件の対偶を証明する. 等式 (2.2) が成立しないとする. 自然数  $i$  に対して,

$$\lfloor \frac{2^{\lfloor \log_2 z \rfloor - 1}}{2^{i-1}} \rfloor < \lfloor \frac{2^{\lfloor \log_2 z' \rfloor - 1}}{2^{i-1}} \rfloor. \quad (2.5)$$

$z = 2^{n+m}$ ,  $z' = 2^{n'+m'}$  とおく. ここで,  $n, n' \in Z_{\geq 0}$ ,  $0 \leq m, m' < 1$  である. そのとき不等式 (2.5) より,

$$\lfloor 2^{n-i} \rfloor < \lfloor 2^{n'-i} \rfloor. \quad (2.6)$$

不等式 (2.6) より,

$$n' - i \geq 0 \quad (2.7)$$

かつ

$$n + 1 \leq n'. \quad (2.8)$$

不等式 (2.7), (2.8) より

$$\lfloor \frac{z}{2^i} \rfloor = \lfloor 2^{n+m-i} \rfloor < 2^{n'-i} \leq \lfloor 2^{n'+m'-i} \rfloor = \lfloor \frac{z'}{2^i} \rfloor.$$

これは等式 (2.1) が成立しないことを示している. □

この小節の残りでは  $h$  は定義 2.1 を満たす関数であると仮定する.

補題 2.3.

$$h\left(\sum_{k=0}^n z_k 2^k\right) \geq \sum_{k=0}^n y_k 2^k \quad (2.9)$$

とする. そのとき, 任意の自然数  $i$  に対して,

$$h\left(\sum_{k=i}^n z_k 2^k\right) \geq \sum_{k=i-1}^n y_k 2^k.$$

証明.  $h\left(\sum_{k=0}^n z_k 2^k\right) = \sum_{k=0}^n u_k 2^k$  とおく. ここで  $u_k \in \{0, 1\}$  である. そのとき, 不等式 (2.9) より,

$$\sum_{k=0}^n u_k 2^k \geq \sum_{k=0}^n y_k 2^k.$$

故に

$$\sum_{k=i-1}^n u_k 2^k \geq \sum_{k=i-1}^n y_k 2^k. \quad (2.10)$$

$k = 0, 1, 2, \dots, i-1$  に対して  $z'_k = 0$  とおく. 不等式 (2.10), 定義 2.1, 注意 2.1 より,  $k = 0, \dots, i-2$  に対して  $y'_k$  が存在して,

$$\begin{aligned} h\left(\sum_{k=i}^n z_k 2^k\right) &= h\left(\sum_{k=i}^n z_k 2^k + \sum_{k=0}^{i-1} z'_k 2^k\right) \\ &= \sum_{k=i-1}^n u_k 2^k + \sum_{k=0}^{i-2} y'_k 2^k \geq \sum_{k=i-1}^n u_k 2^k \geq \sum_{k=i-1}^n y_k 2^k. \end{aligned}$$

□

補題 2.4.  $k = 0, 1, \dots, n$  に対して  $p_k, q_k \in Z_{\geq 0}$  が定義されているとする. このとき次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) ある自然数  $i$  に対して,

$$h\left(\sum_{k=i}^n p_k 2^k\right) < \sum_{k=i-1}^n q_k 2^k \quad (2.11)$$

が成立するとき,

$$h\left(\sum_{k=0}^n p_k 2^k\right) < \sum_{k=i-1}^n q_k 2^k.$$

(ii)

$$h\left(\sum_{k=0}^n p_k 2^k\right) \geq \sum_{k=i-1}^n q_k 2^k$$

とすると,

$$h\left(\sum_{k=i}^n p_k 2^k\right) \geq \sum_{k=i-1}^n q_k 2^k$$

となる.

証明. (i) を証明する.  $h\left(\sum_{k=0}^n p_k 2^k\right) = \sum_{k=0}^n r_k 2^k$  とおく. ここで  $r_k \in \{0, 1\}$  とする. そのとき, 注意 2.1 より,  $k = 0, 1, 2, \dots, i-2$  に対して  $r'_k$  が存在して,  $h\left(\sum_{k=i}^n p_k 2^k + \sum_{k=0}^{i-1} 0 \times 2^k\right) = \sum_{k=i-1}^n r_k 2^k + \sum_{k=0}^{i-2} r'_k 2^k$ . そのとき, 不等式 (2.11) より,

$$\sum_{k=i-1}^n q_k 2^k > \sum_{k=i-1}^n r_k 2^k + \sum_{k=0}^{i-2} r'_k 2^k$$

を得る. 故に不等式 (2.12) または関係 (2.13) を得る.

$$q_n > r_n. \quad (2.12)$$

ある  $j \in Z_{\geq 0}$  が存在して,

$i-1 \leq j \leq n, k = j+1, j+2, \dots, n$  に対して

$$q_k = r_k \text{ が成り立ち } q_j > r_j \text{ となる.} \quad (2.13)$$

そのとき, 不等式 (2.12) または関係 (2.13) より,  $\sum_{k=i-1}^n q_k 2^k > \sum_{k=i-1}^n r_k 2^k + \sum_{k=0}^{i-2} r_k 2^k$

$$= \sum_{k=0}^n r_k 2^k = h\left(\sum_{k=0}^n p_k 2^k\right).$$

(ii) は (i) の対偶である. □

補題 2.5.

$$h\left(\sum_{k=i}^n p_k 2^k\right) < \sum_{k=i-1}^n q_k 2^k + 2^{i-1} \quad (2.14)$$

とすると,

$$h\left(\sum_{k=i-1}^n p_k 2^k\right) < \sum_{k=i-1}^n q_k 2^k + 2^{i-1}.$$

証明.  $\sum_{k=i-1}^{n+1} q'_k 2^k = \sum_{k=i-1}^n q_k 2^k + 2^{i-1}$  と  $p_{n+1} = 0$  とおく. そのとき, 不等式 (2.14) より,  $h\left(\sum_{k=i}^{n+1} p_k 2^k\right) < \sum_{k=i-1}^{n+1} q'_k 2^k$  を得る. 補題 2.4 の (i) により  $h\left(\sum_{k=i-1}^n p_k 2^k\right) \leq h\left(\sum_{k=0}^{n+1} p_k 2^k\right) < \sum_{k=i-1}^{n+1} q'_k 2^k = \sum_{k=i-1}^n q_k 2^k + 2^{i-1}$  となり, この補題は示された. □

補題 2.6.  $x \oplus y \oplus z \neq 0$  かつ

$$y \leq h(z) \quad \text{とする.} \quad (2.15)$$

そのとき以下の命題のうち少なくとも 1 つは成り立つ.

- (1)  $u < x$  を満たすある  $u \in Z_{\geq 0}$  に対して  $u \oplus y \oplus z = 0$ .
- (2)  $v < y$  を満たすある  $v \in Z_{\geq 0}$  に対して  $x \oplus v \oplus z = 0$ .
- (3)  $w < z, y \leq h(w)$  を満たすある  $w \in Z_{\geq 0}$  に対して  $x \oplus y \oplus w = 0$ .
- (4)  $v < y, w' < z, v = h(w')$  を満たすある  $v, w' \in Z_{\geq 0}$  に対して  $x \oplus v \oplus w' = 0$ .

証明.  $x = \sum_{k=0}^n x_k 2^k$ ,  $y = \sum_{k=0}^n y_k 2^k$ ,  $z = \sum_{k=0}^n z_k 2^k$  とする.  $n = 0$  ならばこの補題は自明であるから  $n \geq 1$  と仮定する.  
ある非負整数  $s$  が存在して,

$$x_{n-s-1} + y_{n-s-1} + z_{n-s-1} \neq 0 \pmod{2} \quad (2.16)$$

となり,  $i = n, n-1, \dots, n-s$  に対して  $x_i + y_i + z_i = 0 \pmod{2}$  が成り立つとする.

Case (i)  $x_{n-s-1} = 1$  となる場合. このとき,  $u = \sum_{i=1}^n u_i 2^i$  を次のように決める. まず  $i = n, n-1, \dots, n-s$  に対して  $u_i = x_i$  とし,  $u_{n-s-1} = 0 < x_{n-s-1}$  として,  $i = n-s-2, n-s-3, \dots, 0$  に対して  $u_i = y_i + z_i \pmod{2}$  と決める. このとき  $u \oplus y \oplus z = 0$  かつ  $u < x$  となって (1) が成り立つ.

Case (ii)  $y_{n-s-1} = 1$  となる場合は (i) で使った方法と同じようにして,  $v < y$  となるような  $v \in Z_{\geq 0}$  があって  $x \oplus v \oplus z = 0$  となり, (2) が成り立つ.

Case (iii)

$$z_{n-s-1} = 1 \quad (2.17)$$

である場合.  $i = n, n-1, \dots, n-s$  に対して,

$$w_i = z_i \quad (2.18)$$

として, 各  $i = n-s-1, \dots, 0$  に対して,  $w_i = x_i + y_i \pmod{2}$  とする. 不等式 (2.16) と等式 (2.17) より,  $w_{n-s-1} = x_{n-s-1} + y_{n-s-1} = 0 \pmod{2}$  を得る. 故に

$$w_{n-s-1} = 0 < 1 = z_{n-s-1}. \quad (2.19)$$

このとき 2 つの Subcase に分けて考える.

Subcase (iii.1) もし  $y \leq h(w)$  ならばこの補題の (3) は示される.

Subcase (iii.2) 次に

$$y > h(w) \quad (2.20)$$

となる場合を考える. 不等式 (2.15) より  $\sum_{k=0}^n y_k 2^k \leq h(\sum_{k=0}^n z_k 2^k)$  となる. 故に 補題 2.3 と等式 (2.18) より

$$\sum_{k=n-s-1}^n y_k 2^k \leq h\left(\sum_{k=n-s}^n z_k 2^k\right) = h\left(\sum_{k=n-s}^n w_k 2^k\right) \leq h(w). \quad (2.21)$$

不等式 (2.21) と不等式 (2.20) より

$$\sum_{k=n-j}^n y_k 2^k \leq h\left(\sum_{k=0}^n w_k 2^k\right) = h(w) \quad (2.22)$$

$$\text{かつ} \quad \sum_{k=n-j-1}^n y_k 2^k > h\left(\sum_{k=0}^n w_k 2^k\right) = h(w) \quad (2.23)$$

のような自然数  $j$  が存在する.

不等式 (2.21) と不等式 (2.23) より,

$$n-j-1 < n-s-1. \quad (2.24)$$

不等式 (2.22) と補題 2.4 の (ii) より,

$$\sum_{k=n-j}^n y_k 2^k \leq h\left(\sum_{k=n-j+1}^n w_k 2^k\right) \leq h\left(\sum_{k=n-j}^n w_k 2^k\right). \quad (2.25)$$

不等式 (2.23) より,

$$\sum_{k=n-j-1}^n y_k 2^k > h\left(\sum_{k=n-j}^n w_k 2^k\right). \quad (2.26)$$

不等式 (2.25) と不等式 (2.26) より,

$$\sum_{k=n-j}^n y_k 2^k \leq h\left(\sum_{k=n-j}^n w_k 2^k\right) < \sum_{k=n-j-1}^n y_k 2^k \quad (2.27)$$

を得る．ここで， $i = n, n-1, n-2, \dots, 0$  に対して， $v_i$  と  $w'_i$  の値を決めることによって  $v$  と  $w'$  を定義する．

まず  $i = n, n-1, \dots, n-j$  に対して

$$w'_i = w_i \quad \text{かつ} \quad v_i = y_i \quad (2.28)$$

とし，次に

$$v_{n-j-1} = 0 < 1 = y_{n-j-1} \quad (2.29)$$

かつ

$$w'_{n-j-1} = x_{n-j-1} + v_{n-j-1}$$

と決める． $v_{n-j-1} = 0$ ， $y_{n-j-1} = 1$  なので不等式 (2.27) より

$$\sum_{k=n-j-1}^n v_k 2^k \leq h\left(\sum_{k=n-j}^n w'_k 2^k\right) < \sum_{k=n-j-1}^n v_k 2^k + 2^{n-j-1}. \quad (2.30)$$

不等式 (2.30) と補題 2.5 より，

$$\begin{aligned} \sum_{k=n-j-1}^n v_k 2^k &\leq h\left(\sum_{k=n-j-1}^n w'_k 2^k\right) \\ &< \sum_{k=n-j-1}^n v_k 2^k + 2^{n-j-1} \end{aligned} \quad (2.31)$$

を得る．次に各  $t = n-j-1, n-j-2, \dots, 2, 1, 0$  に対して，次の不等式 (2.32) が成り立つことを  $t$  を 1 ずつ減らしながら証明していく．

$$\sum_{k=t}^n v_k 2^k \leq h\left(\sum_{k=t}^n w'_k 2^k\right) < \sum_{k=t}^n v_k 2^k + 2^t. \quad (2.32)$$

不等式 (2.31) より， $t = n-j-1$  の場合は不等式 (2.32) が成り立つ． $t \leq n-j-1$  を満たすある自然数  $t$  に対して，不等式 (2.32) が成り立つとする．そのとき不等式 (2.33) または不等式 (2.36) が成り立つ．これらの不等式を用いて (2.35) と (2.38) を証明することにする．

もし

$$\sum_{k=t}^n v_k 2^k + 2^{t-1} \leq h\left(\sum_{k=t}^n w'_k 2^k\right) < \sum_{k=t}^n v_k 2^k + 2^t \quad (2.33)$$

とすると，このとき  $v_{t-1} = 1$  と  $w'_{t-1} = x_{t-1} + v_{t-1} \pmod{2}$  とする． $v_{t-1} = 1$  なので，不等式 (2.33) より，

$$\sum_{k=t-1}^n v_k 2^k \leq h\left(\sum_{k=t}^n w'_k 2^k\right) < \sum_{k=t-1}^n v_k 2^k + 2^{t-1} \quad (2.34)$$

を得る． $v_{t-1} 2^{t-1} + 2^{t-1} = 2^t$  に注目する．

補題 2.5 と不等式 (2.34) より，

$$\sum_{k=t-1}^n v_k 2^k \leq h\left(\sum_{k=t-1}^n w'_k 2^k\right) < \sum_{k=t-1}^n v_k 2^k + 2^{t-1}. \quad (2.35)$$

もし

$$\sum_{k=t}^n v_k 2^k + 2^{t-1} > h\left(\sum_{k=t}^n w'_k 2^k\right) \quad (2.36)$$

ならば，そのとき  $v_{t-1} = 0$  と  $w'_{t-1} = x_{t-1} + v_{t-1} \pmod{2}$  とする．

$v_{t-1} = 0$  なので，不等式 (2.36) と (2.32) から

$$\sum_{k=t-1}^n v_k 2^k \leq h\left(\sum_{k=t}^n w'_k 2^k\right) < \sum_{k=t-1}^n v_k 2^k + 2^{t-1} \quad (2.37)$$



を得る．そのとき，不等式 (2.37) と補題 2.5 より，

$$\sum_{k=t-1}^n v_k 2^k \leq h\left(\sum_{k=t-1}^n w'_k 2^k\right) < \sum_{k=t-1}^n v_k 2^k + 2^{t-1} \quad (2.38)$$

を得る．

この方法で不等式 (2.32) より，不等式 (2.35) または不等式 (2.38) を得る．不等式 (2.35) と不等式 (2.38) は同じ形の不等式であることに注目する．この過程を続けることにより，

$$\sum_{k=0}^n v_k 2^k \leq h\left(\sum_{k=0}^n w'_k 2^k\right) < \sum_{k=0}^n v_k 2^k + 2^0$$

を得る．よって

$\sum_{k=0}^n v_k 2^k = h\left(\sum_{k=0}^n w'_k 2^k\right)$  を得る．不等式 (2.19), 不等式 (2.24), 不等式 (2.29) と等式 (2.28) により,  $v < y$  かつ  $w' < z$  を得る．以上よりこの補題の (4) が成り立つ．  $\square$

**補題 2.7.** もし  $x \oplus y \oplus z = 0$  かつ  $y \leq h(z)$  とする．このとき以下のことが成り立つ．

- (i)  $u < x$  を満たす  $u \in Z_{\geq 0}$  に対して  $u \oplus y \oplus z \neq 0$ .
- (ii)  $v < y$  を満たす  $v \in Z_{\geq 0}$  に対して  $x \oplus v \oplus z \neq 0$ .
- (iii)  $w < z$  を満たす  $w \in Z_{\geq 0}$  に対して  $x \oplus y \oplus w \neq 0$ .
- (iv)  $v < y, w < z$  かつ  $v = h(w)$  を満たす  $v, w \in Z_{\geq 0}$  に対して  $x \oplus v \oplus w \neq 0$ .

証明. この補題の (i),(ii),(iii) は定義 1.1 (二ム和の定義) から直接導かれる．

(iv) を証明する． $v < y, w < z$  を満たす  $w \in Z_{\geq 0}$  に対して  $v = h(w)$  がなりたつとする．

$$i = n, n-1, n-2, \dots, j \quad \text{に対して} \quad w_i = z_i \text{ かつ } w_{j-1} < z_{j-1} \quad (2.39)$$

とする． $y \leq h(z)$  より,  $h\left(\sum_{k=0}^n z_k 2^k\right) \geq \sum_{k=0}^n y_k 2^k$  を得る．故に補題 2.3 より

$$h\left(\sum_{k=j}^n z_k 2^k\right) \geq \sum_{k=j-1}^n y_k 2^k \quad (2.40)$$

を得る． $v = h(w), v < y$  なので, 関係 (2.39) から  $h\left(\sum_{k=j}^n z_k 2^k\right) = h\left(\sum_{k=j}^n w_k 2^k\right)$

$$\leq h(w) = v = \sum_{k=0}^n v_k 2^k < \sum_{k=0}^n y_k 2^k \quad (2.41)$$

を得る．不等式 (2.40) と (2.41) より

$$\sum_{k=j-1}^n y_k 2^k \leq \sum_{k=0}^n v_k 2^k < \sum_{k=0}^n y_k 2^k$$

を得る．故に  $k = n, n-1, n-2, \dots, j-1$  に対して,

$$v_k = y_k \quad (2.42)$$

を得る． $x \oplus y \oplus z = 0$  なので,

$$x_{j-1} + y_{j-1} + z_{j-1} = 0 \pmod{2} \quad (2.43)$$

を得る．関係 (2.39), 等式 (2.42) 及び等式 (2.43) より,  $x_{j-1} + v_{j-1} + w_{j-1} \neq 0 \pmod{2}$  を得る．故に  $x \oplus v \oplus w \neq 0$ .  $\square$

ここで, 図 2.1, 2.2 のように苦い部分の右側に  $CB(f, y, z)$ , 左側に高さ 1 のチョコレートの直和によってできるチョコレートゲームを考える．左側の高さ 1 チョコレートのカットできる回数を  $x$ , 右側の  $CB(f, y, z)$  の座標を合わせて,  $\{x, y, z\}$  でチョコレートの状態を表す．

**例 2.1.** 直和チョコレートゲームの例

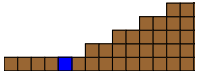


図 2.1.  $\{4, 4, 9\}$   
 $f(t) = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$

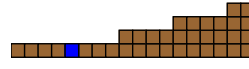


図 2.2.  $\{4, 3, 13\}$   
 $f(t) = \lfloor \frac{t}{4} \rfloor$

$move_h(\{x, y, z\})$  は座標  $\{x, y, z\}$  であるポジションから一回 (直接) で行くことができるすべてのポジションの座標からなる集合である .

定義 2.2.  $x, y, z \in Z_{\geq 0}$  に対して,

$$move_h(\{x, y, z\}) = \{\{u, y, z\} : u < x\} \cup \{\{x, v, z\} : v < y\} \cup \{\{x, \min(y, h(w)), w\} : w < z\} \quad (u, v, w \in Z_{\geq 0})$$

と定義する .

定義 2.3.  $A_k = \{\{x, y, z\} : x, y, z \in Z_{\geq 0}, y \leq h(z), x \oplus y \oplus z = 0\}$ ,  $B_k = \{\{x, y, z\} : x, y, z \in Z_{\geq 0}, y \leq h(z), x \oplus y \oplus z \neq 0\}$  とおく .

補題 2.8. 定義 2.3 の集合  $A_k$  と  $B_k$  に対して次の (i), (ii) が成り立つ .

- (i)  $A_k$  からプレーを始めると, 次の一手で必ず  $B_k$  の場所に行く .
- (ii) もし  $B_k$  から始めると,  $A_k$  の座標に行くことができる手が少なくとも 1 つある .

証明. 定義 2.2 で定義される  $move_h(\{x, y, z\})$  は 1 回で 座標  $\{x, y, z\}$  から行けるポジションの座標を全部含んでいるので, 補題 2.7 と 補題 2.6 より それぞれ (i) と (ii) を得る . □

定理 2.1. 定義 2.3 で定義される集合  $A_k$  と  $B_k$  に対して,  $A_k$  と  $B_k$  は苦いチョコレートの右側の  $CB(h, y, z)$  と左側の高さ 1 のチョコレートの直和ゲームの  $\mathcal{P}$ -positions の集合と  $\mathcal{N}$ -positions の集合である .

証明. もし私達が  $\{x, y, z\} \in A_k$  からゲームを開始したとすると, 補題 2.8 より, 先手である私達が選ぶ手は全て  $\{p, q, r\} \in B_k$  に行く . この状態で後手である相手は補題 2.8 により, うまく選ぶことで  $A_k$  へ行くことができる . 毎回のプレーによって, 座標は減って行くので, 有限回数内でゲームは終了する . 後手である相手は常に  $A_k$  へ到達することができる, 最後は  $\{0, 0, 0\} \in A_k$  へ到達し相手が勝つ . よって,  $A_k$  は後手必勝 ( $\mathcal{P}$ -Position) の集合である .

次に, もし私達が  $\{x, y, z\} \in B_k$  からゲームを開始したとすると, 補題 2.8 により, 先手である私達は  $\{p, q, r\} \in A_k$  へ行くことができる . この状態で後手である相手は, 補題 2.8 より, 必ず  $B_k$  に行く . このようにして, 先手である自分は常に  $A_k$  へ行くことができ, 最後は  $\{0, 0, 0\}$  に到達して私達が勝つ . よって,  $B_k$  は先手必勝 ( $\mathcal{N}$ -position) の集合である . □

定理 2.2.  $h$  を定義 2.1 の条件を満たす関数とすると,  $CB(h, y, z)$  のグランディ数は  $y \oplus z$  である .

証明. 定理 2.1 より, 左の高さ 1 のチョコレートと右の  $CB(h, y, z)$  の直和ゲームは, 座標  $\{x, y, z\}$  が  $x \oplus y \oplus z = 0$  のとき  $\mathcal{P}$ -position である . このとき, 直和ゲームのグランディ数は定理 1.1 の (i) から 0 となる . しかし定理 1.1 の (ii) によると, そのグランディ数は左の高さ 1 のチョコレートのグランディ数と右の  $CB(h, y, z)$  のグランディ数の二重和なので, それが 0 であるということは, 左の高さ 1 のチョコレートのグランディ数と右の  $CB(h, y, z)$  のグランディ数が等しいことになる . 左の高さ 1 のチョコレートのグランディ数は明らかに  $x$  となるので, 右側の  $CB(h, y, z)$  のグランディ数は  $x = y \oplus z$  である . □

定理 2.2 より定義 2.1 の条件はチョコレート  $CB(h, y, z)$  がグランディ数  $G(\{y, z\}) = y \oplus z$  となるための十分条件である .

次の小節において定義 2.1 の条件が, チョコレート  $CB(h, y, z)$  のグランディ数  $G(\{y, z\}) = y \oplus z$  となるための必要条件であることを証明する .

## 2.2 必要条件

この小節ではグランディ数が  $y \oplus z$  と等しくなるようなチョコレートの必要条件について述べる .

定義 2.4.  $f$  を , 以下の条件 (a) を満たす  $Z_{\geq 0}$  から  $Z_{\geq 0}$  への単調増加の関数とする .

(a)  $G(\{y, z\})$  はチョコレート  $CB(f, y, z)$  のグランディ数とする . そのとき ,

$$G(\{y, z\}) = y \oplus z.$$

この小節を通して , 関数  $f$  は定義 2.4 の (a) を満たすことを仮定する . そして , この関数が定義 2.1 の (a) を満たすことを証明する . そのために以下の補題を使う .

補題 2.9.  $y = f(z)$  ,  $y' \leq f(z+1)$  ,  $y < y'$  を満たす  $y, z, y' \in Z_{\geq 0}$  に対して ,

$$G(\{y, z+1\}) < G(\{y', z+1\}) \text{ となる .}$$

証明.  $y = f(z)$  なので ,  $w \leq z$  を満たす  $w$  に対して  $f(w) \leq y < y'$  となる . よって

$$\begin{aligned} \text{move}_f(\{y', z+1\}) &= \{\{v, z+1\} : v < y'\} \cup \{\{\min(y', f(w)), w\} : w < z+1\} = \{\{v, z+1\} : v < y'\} \cup \{\{f(w), w\} : \\ w < z+1\} &= \{\{v, z+1\} : y \leq v < y'\} \cup \{\{v, z+1\} : v < y\} \cup \{\{f(w), w\} : w < z+1\} \\ &= \{\{v, z+1\} : y \leq v < y'\} \cup \{\{v, z+1\} : v < y\} \cup \{\{\min(y, f(w)), w\} : w < z+1\} = \{\{v, z+1\} : y \leq v < \\ y'\} \cup \text{move}_f(\{y, z+1\}) & \text{(ここで } v, w \in Z_{\geq 0}\text{).} \end{aligned}$$

よって ,

$$\begin{aligned} G(\{y', z+1\}) &= \text{mex}(\{G(\{v, z+1\}) : y \leq v < y'\} \cup \\ \{G(\{a, b\}) : \{a, b\} \in \text{move}_f(\{y, z+1\})\}) & \\ &\geq G(\{y, z+1\}). \end{aligned} \tag{2.44}$$

$\{y, z+1\} \in \text{move}_f(\{y', z+1\})$  なので  $G(\{y', z+1\}) \neq G(\{y, z+1\})$ . よって不等式 (2.44) によって  $G(\{y, z+1\}) < G(\{y', z+1\})$  が証明される .  $\square$

補題 2.10.  $y \leq f(z)$  を満たす  $y, z \in Z_{\geq 0}$  に対して ,  $\{G(\{\min(y, f(w)), w\}) : w < z\} = \{y \oplus w : w < z\}$  が成り立つ .

証明.  $w \in Z_{\geq 0}$  は  $w < z$  を満たすとして ,

$$n = \lfloor \log_2 \max(y, z) \rfloor + 1 \tag{2.45}$$

とおく .

そのとき等式 (2.45) により  $y \oplus w < y \oplus (z + 2^n) = G(\{y, z + 2^n\})$  となる . グランディ数の定義より ,  $\{a, b\} \in \text{move}_f(\{y, z + 2^n\})$  ,  $G(\{a, b\}) = y \oplus w$  となる  $a, b \in Z_{\geq 0}$  が存在している .

$\text{move}_f$  の定義より , 以下の等式 (2.46) または等式 (2.47) のどちらかが成り立つ .

$$G(\{\min(y, f(w')), w'\}) = y \oplus w. \tag{2.46}$$

ここで ,  $w' \in Z_{\geq 0}$  かつ  $w' < z + 2^n$  である .

$$y' \oplus (z + 2^n) = G(\{y', z + 2^n\}) = y \oplus w. \tag{2.47}$$

ここで ,  $y' \in Z_{\geq 0}$  かつ  $y' < y$  である .

等式 (2.47) は等式 (2.45) に矛盾しており , 故に等式 (2.46) が正しいことになる . もし

$$w' \geq z \tag{2.48}$$

ならばそのとき  $f(w') \geq f(z) \geq y$ . 故に

$$G(\{\min(y, f(w')), w'\}) = G(\{y, w'\}) = y \oplus w'. \tag{2.49}$$

等式 (2.46), 等式 (2.49) より

$$y \oplus w = y \oplus w' \quad (2.50)$$

を得る。  $w' < w$  なので (2.50) は矛盾している。よって、不等式 (2.48) は成立しないので、  $w' < z$  となる。故に等式 (2.46) により  $\{y \oplus w : w < z\} \subset \{G(\{\min(y, f(w)), w\}) : w < z\}$  が示される。  $\{y \oplus w : w < z\}$  の要素の数は  $\{G(\{\min(y, f(w)), w\}) : w < z\}$  の要素の数と同じなので  $\{G(\{\min(y, f(w)), w\}) : w < z\} = \{y \oplus w : w < z\}$  を得る。  $\square$

補題 2.11.  $d, e, i \in Z_{\geq 0}$ ,  $d_i \in \{0, 1\}$ ,  $e < 2^i$  及び  $0 < d_i 2^i + e$  に対して、

$$a = d \times 2^{i+1} + d_i 2^i + e - 1$$

とする。

もし  $c \in Z_{\geq 0}$  に対して  $c \times 2^{i+1} \leq f(a) < c \times 2^{i+1} + 2^i$  ならば、

$$f(a+1) < c \times 2^{i+1} + 2^i \text{ である。}$$

証明.  $0 \leq t < 2^i$  に対して

$$f(a) = c \times 2^{i+1} + t \quad (2.51)$$

とおく。

$$f(a+1) \geq c \times 2^{i+1} + 2^i \quad (2.52)$$

と仮定して、このことから矛盾ができることを示す。(背理法で証明する.)

Case (i) もし  $d_i = 1$  ならば

$$\begin{aligned} & G(\{c \times 2^{i+1} + 2^i, a+1\}) \\ &= (c \times 2^{i+1} + 2^i) \oplus (d \times 2^{i+1} + d_i 2^i + e) \\ &= (c \oplus d) 2^{i+1} + e < (c \oplus d) 2^{i+1} + d_i 2^i + (t \oplus e) \\ &= G(\{c \times 2^{i+1} + t, a+1\}). \end{aligned} \quad (2.53)$$

である。等式 (2.51), 不老式 (2.52) 及び 補題 2.9 により  $G(\{c \times 2^{i+1} + t, a+1\}) < G(\{c \times 2^{i+1} + 2^i, a+1\})$  を得るが、これは等式 (2.53) と矛盾する。

Case (ii) もし  $d_i = 0$  ならば  $G(\{c \times 2^{i+1} + 2^i, a+1\}) = (c \times 2^{i+1} + 2^i) \oplus (d \times 2^{i+1} + e)$

$$= (c \oplus d) 2^{i+1} + 2^i + e > (c \oplus d) 2^{i+1} + 2^i.$$

ここで、 $d_i 2^i + e > 0$ ,  $d_i = 0$  なので  $e > 0$  に注意して欲しい。グランディ数の定義より

$$\begin{aligned} & (c \oplus d) 2^{i+1} + 2^i \in \{G(\{p, q\}) : \{p, q\} \\ & \in \text{move}_f(\{c \times 2^{i+1} + 2^i, a+1\})\}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} & \{G(\{p, q\}) : \{p, q\} \in \text{move}_f(\{c \times 2^{i+1} + 2^i, a+1\})\} \\ &= \{G(\{v, d \times 2^{i+1} + e\}) : v = 0, 1, 2, \dots, c \times 2^{i+1} + 2^i - 1\} \\ & \cup \{G(\{\min(c \times 2^{i+1} + 2^i, f(w)), w\}) : \\ & w = 0, 1, 2, \dots, d \times 2^{i+1} + e - 1\}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

ここで  $a = d \times 2^{i+1} + e - 1$  に注意して欲しい。

$w \leq a$  に対して、 $f(w) \leq f(a) = c \times 2^{i+1} + t$  であるから、

$$\begin{aligned} & (2.55) = \\ & \{G(\{v, d \times 2^{i+1} + e\}) : \\ & v = 0, 1, 2, \dots, c \times 2^{i+1} + 2^i - 1\} \\ & \cup \{G(\{\min(c \times 2^{i+1} + t, f(w)), w\}) : \\ & w = 0, 1, 2, \dots, d \times 2^{i+1} + e - 1\}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

$c \times 2^{i+1} + t = f(a) \leq f(a+1) = f(d \times 2^{i+1} + e)$  なので, 補題 2.10 により  $\{G(\{\min(c \times 2^{i+1} + t, f(w)), w\}) : w = 0, 1, 2, \dots, d \times 2^{i+1} + e - 1\} = \{(c \times 2^{i+1} + t) \oplus w : w = 0, 1, 2, \dots, d \times 2^{i+1} + e - 1\}$  となる. 従って定義 2.4 より,

$$(2.56) = \{v \oplus (d \times 2^{i+1} + e) : v = 0, 1, 2, \dots, c \times 2^{i+1} + 2^i - 1\} \cup \{(c \times 2^{i+1} + t) \oplus w : w = 0, 1, 2, \dots, d \times 2^{i+1} + e - 1\}$$

$$= \{(c \times 2^{i+1} + k) \oplus (d \times 2^{i+1} + e) : k = 0, 1, 2, \dots, 2^i - 1\} \quad (2.57)$$

$$\cup \{k \oplus (d \times 2^{i+1} + e) : k = 0, 1, 2, \dots, c \times 2^{i+1} - 1\} \quad (2.58)$$

$$\cup \{(c \times 2^{i+1} + t) \oplus (d \times 2^{i+1} + k) : k = 0, 1, 2, \dots, e - 1\} \quad (2.59)$$

$$\cup \{(c \times 2^{i+1} + t) \oplus k : k = 0, 1, 2, \dots, d \times 2^{i+1} - 1\}. \quad (2.60)$$

このとき以下の (i), (ii), (iii), (iv) が成り立つ.

(i) 集合 (2.57) に属する全ての数は,  $(c \oplus d)2^{i+1} + (k \oplus e)$  の形の数であり,  $(c \oplus d)2^{i+1} + 2^i$  を含まない. ここで,  $k, e < 2^i$  に注意されたい.

(ii) 集合 (2.58) の数の  $2^{i+1}$  の係数は  $c \oplus d$  ではない, 故にこの集合は  $(c \oplus d)2^{i+1} + 2^i$  を含まない.

(iii) 集合 (2.59) に含まれるすべての数は  $(c \oplus d)2^{i+1} + (t \oplus k)$  の形の数になっている. 故にこの集合は  $(c \oplus d)2^{i+1} + 2^i$  を含んでいない.

$k \leq e - 1 < 2^i$  と  $t < 2^i$  に注目する.

(iv) 集合 (2.60) の  $2^{i+1}$  の係数は  $c \oplus d$  ではない. 故にこの集合は  $(c \oplus d)2^{i+1} + 2^i$  を含んでいない.

(i), (ii), (iii), (iv) は関係 (2.54) に矛盾している. よって不等式 (2.52) は成立しないことが示された. このことで定理の証明が終る.  $\square$

定理 2.3.  $f$  を定義 2.4 の条件を満たす関数とすると, 関数  $f$  は定義 2.1 の条件を満たす.

証明. 背理法で証明する.  $f$  が定義 2.1 の条件を満たさないと仮定すると, そのとき  $z < z'$  を満たす  $z, z' \in Z_{\geq 0}$  と自然数  $j$  が存在して,

$$\lfloor \frac{z}{2^j} \rfloor = \lfloor \frac{z'}{2^j} \rfloor \quad (2.61)$$

かつ

$$\lfloor \frac{f(z)}{2^{j-1}} \rfloor < \lfloor \frac{f(z')}{2^{j-1}} \rfloor. \quad (2.62)$$

等式 (2.61) より,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  に対して  $z_k, z'_k \in Z_{\geq 0}$  が存在して,  $z = \sum_{k=0}^n z_k 2^k$  と  $z' = \sum_{k=j}^n z_k 2^k + \sum_{k=0}^{j-1} z'_k 2^k$  が成り立つ. 不等式 (2.62) により, 自然数  $i \geq j-1$  と  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  に対して  $y_k, y'_k \in Z_{\geq 0}$  が存在して,  $y_i = 0 < 1 = y'_i$ ,

$$f\left(\sum_{k=0}^n z_k 2^k\right) = \sum_{k=i+1}^n y_k 2^k + y_i \times 2^i + \sum_{k=0}^{i-1} y_k 2^k \quad (2.63)$$

かつ

$$f\left(\sum_{k=j}^n z_k 2^k + \sum_{k=0}^{j-1} z'_k 2^k\right) = \sum_{k=i+1}^n y_k 2^k + y'_i \times 2^i + \sum_{k=0}^{i-1} y'_k 2^k \quad (2.64)$$

が成り立つ.

$c = \sum_{k=i+1}^n y_k 2^{k-(i+1)}$  とする. そのとき  $c \times 2^{i+1} = \sum_{k=i+1}^n y_k 2^k$  となる.

等式 (2.63) と等式 (2.64) から

$$f\left(\sum_{k=0}^n z_k 2^k\right) = c \times 2^{i+1} + 0 \times 2^i + \sum_{k=0}^{i-1} y_k 2^k \quad (2.65)$$

と

$$f\left(\sum_{k=j}^n z_k 2^k + \sum_{k=0}^{j-1} z'_k 2^k\right) = c \times 2^{i+1} + 2^i + \sum_{k=0}^{i-1} y'_k 2^k \quad (2.66)$$

を得る .

$$a = \max(\{z : f(z) < c \times 2^{i+1} + 2^i\}) \quad (2.67)$$

と

$$b = \min(\{z : f(z) \geq c \times 2^{i+1} + 2^i\}) \quad (2.68)$$

とする . そのとき , (2.67) と (2.68) から直接  $b = a + 1$  が出る .

$d = \sum_{k=i+1}^n z_k 2^{k-(i+1)}$  とする . そのとき ,  $d \times 2^{i+1} = \sum_{k=i+1}^n z_k 2^k$  となる . 等式 (2.65) により ,  $f(d \times 2^{i+1}) \leq f\left(\sum_{k=0}^n z_k 2^k\right) < c \times 2^{i+1} + 2^i$  となり , 等式 (2.67) を使うと

$$a \geq \sum_{k=0}^n z_k 2^k \geq d \times 2^{i+1} \quad (2.69)$$

を得る .  $i + 1 \geq j$  より ,  $(d + 1) \times 2^{i+1} = \sum_{k=i+1}^n z_k 2^k + 2^{i+1}$

$$> \sum_{k=j}^n z_k 2^k + \sum_{k=0}^{j-1} z'_k 2^k \quad (2.70)$$

を得る . 等式 (2.66) と等式 (2.68) から

$$\sum_{k=j}^n z_k 2^k + \sum_{k=0}^{j-1} z'_k 2^k \geq b. \quad (2.71)$$

不等式 (2.70) と不等式 (2.71) から

$$(d + 1) \times 2^{i+1} > b = a + 1 \quad (2.72)$$

を得る . 不等式 (2.69) から

$$a + 1 > d \times 2^{i+1} \quad (2.73)$$

を得る . 不等式 (2.72) と不等式 (2.73) により ,  $(d + 1) \times 2^{i+1} > b = a + 1 > d \times 2^{i+1}$  となり ,  $e < 2^i$  ,  $0 < d_i 2^i + e$  を満たす  $d_i$  と  $e$  が存在して

$$a + 1 = d \times 2^{i+1} + d_i 2^i + e. \quad (2.74)$$

となる . 等式 (2.65) と不等式 (2.69) により ,

$$f(a) \geq f\left(\sum_{k=0}^n z_k 2^k\right) \geq c \times 2^{i+1} \quad (2.75)$$

を得る . 等式 (2.67) から

$$f(a) < c \times 2^{i+1} + 2^i \quad (2.76)$$

と

$$f(a + 1) \geq c \times 2^{i+1} + 2^i \quad (2.77)$$

が導かれる .

等式 (2.74) , 不等式 (2.75) , 不等式 (2.76) と不等式 (2.77) は補題 2.11 の結果と矛盾する . 故に  $f$  は定義 2.1 の条件を満たす .  $\square$

定理 2.3 より , 不等式 2.1 はグランディ数  $G(\{y, z\}) = y \oplus z$  となる  $CB(f, y, z)$  の必要条件である .

## 参考文献

- [1] S. Nakamura and R. Miyadera, Impartial Chocolate Bar Games, Vol.15, Integers 2015.
- [2] A.C.Robin, A poisoned chocolate problem, Problem corner, The Mathematical Gazette Vol. 73, No. 466 (Dec., 1989), pp. 341-343.
- [3] D.Zeilberger, Three-Rowed CHOMP, Adv. Applied Math Vol. 26 (2001), pp. 168-179.
- [4] M. H. Albert, R. J. Nowakowski and D. Wolfe, Lessons In Play, A K Peters, p-139.
- [5] A.N.Siegel, Combinatorial Game Theory (Graduate Studies in Mathematics), American Mathematical Society (2013).